Colegio Metropolitano Del Sur

MACTIVATE 2 EN CASA

	Área: Matemáticas	**Asignatura:** Matemáticas
	Docentes: Luis Lozada Ruiz	
	DBA 5: Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. **DBA 4:** Interpreta y diseña técnicas para hacer mediciones con niveles crecientes de precisión (uso de diferentes instrumentos para la misma medición, revisión de escalas y rangos de medida, estimaciones, verificaciones a través de mediciones indirectas).	

Momento de Indagación

La clave para el desarrollo del tratamiento matemático del movimiento y del cambio fue el hallazgo de un método para manejar el infinito. Ello significa encontrar modos de describir y manipular las diversas estructuras que el infinito implica. La paradoja de Aquiles y la tortuga de Zenón, por ejemplo, puede plantearse una vez que se dispone de un modo de tratar la estructura involucrada. Los valores de la distancia que la tortuga lleva de adelanto a Aquiles en cada etapa de la carrera son (en metros).

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

La paradoja, por tanto, está vinculada a lo que hagamos con la suma infinita en la cual los tres puntos suspensivos significan que esta suma prosigue por siempre, continuando el patrón indicado.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

No hay esperanza de sumar realmente todos los infinitos términos de esta suma. En realidad, tampoco podemos escribirlos todos, así que el llamarla “suma” es algo equívoco; no se trata de una suma en el sentido normal de la palabra. De hecho, para evitar confusiones, los matemáticos se refieren a tales sumas infinitas con el nombre de series infinitas. Éste es uno de los muchos ejemplos en los cuales los matemáticos han tomado una palabra corriente y le han dado un significado técnico, con frecuencia relacionado sólo ligeramente con su uso cotidiano. Al desplazar nuestra atención de los términos individuales de la serie a la estructura general, es fácil hallar el valor de la serie. Si S denota el valor desconocido:

$$s = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

La estructura de esta serie consiste en que cada término sucesivo es un décimo del anterior. Así pues, si se multiplica toda la serie por 10, se obtiene de nuevo la misma serie, aparte del primer término:

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

Si ahora se resta la primera identidad de esta segunda, todos los términos de la parte de la derecha se cancelan por pares, con excepción del 100 inicial de la segunda serie: $10s - s = 100$

Ahora tenemos una ecuación ordinaria finita, que se puede resolver del modo corriente:

$9s = 100$ y por tanto $s = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$

En otras palabras, Aquiles alcanza a la tortuga cuando lleva recorridos exactamente $11\frac{1}{9}\ metros.$

El punto crucial es que una serie infinita puede tener un valor finito; el rompecabezas de Zenón es paradójico solamente si se piensa que una serie infinita debe tener un valor infinito

Limites

El límite de una función es un concepto fundamental del análisis matemático aplicado a las funciones. En particular, el concepto aplica en análisis real al estudio de límites, continuidad y derivabilidad de las funciones reales.

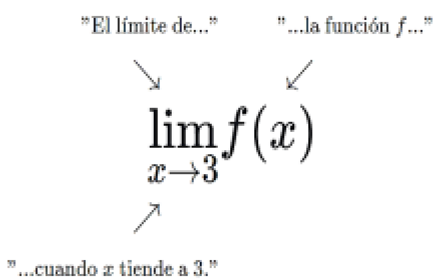
Intuitivamente, el hecho de que una función f alcance un límite L en un punto c significa que, tomando puntos suficientemente próximos a c, el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee.

La cercanía de los valores de f y L no depende del valor que adquiere f en dicho punto c Límite es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor.

En cálculo (especialmente en análisis real y matemático) este concepto se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación, integración, entre otros.

En análisis real para funciones de una variable, se puede hacer una definición de límite similar a la de límite de una sucesión, en la cual, los valores que toma la función dentro de un intervalo se van aproximando a un punto fijado c, independientemente de que éste pertenezca al dominio de la función.

Esto se puede generalizar aún más a funciones de varias variables o funciones en distintos espacios métricos. Informalmente, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a c, y se escribe:



Tenemos también una notación especial para hablar de límites. Así es como escribimos el límite de f cuando x se acerca (o tiende a) 3:

El símbolo lim significa que tomamos el límite de algo. La expresión a la derecha de lim es la expresión de la cual tomamos el límite. En nuestro caso, se trata de la función f. La expresión $x \to 3$,que aparece debajo de lim significa que tomamos el límite de f a medida que los valores de x se acercan a 3.

Límites y continuidad

La palabra límite se usa en el lenguaje diario, como cuando se dice “estoy acercándome al límite de mi paciencia” tal sentido tiene algo que ver con el cálculo, pero no mucho.

Una noción intuitiva

Consideremos la función determinada por la formula

$$f(x) = \frac{\mathbf{x^2 - 1}}{\mathbf{x - 1}}$$

Notemos que no está definida para $x = 1$ ya que en este punto $f(x)$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, que carece de significado, podemos preguntarnos qué sucede con $f(x)$ cuando x se acerca a 1.

Realizamos una tabla de valores donde x se aproxime a 1 tanto por la izquierda como por la derecha, pero no tome el valor de 1.

x	F(x) = $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$
1.5	2.5
1.2	2.2
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001
.	.
1.0000	¿
.	.
0.9999	1.9999
0.999	1.999
0.9	1.9
0.7	1.7
0.5	1.5

Con esta información podemos concluir que $f(x)$ tiende a 2 cuando x tiende a, en símbolos matemáticos.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Esto se lee “el límite cuando x tiene a 1 de $\frac{x^2-1}{x-2}$ es 2

Siendo buenos algebraicos (es decir, sabiendo como factorizar una diferencia de cuadrados), podemos obtener mas y mejor la evidencia.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) * (x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

Nótese que $\frac{(x-1)}{(x-1)} = 1$ siempre y cuando $x \neq 1$. Esto justifica el segundo paso. El tercer paso es parece razonable.

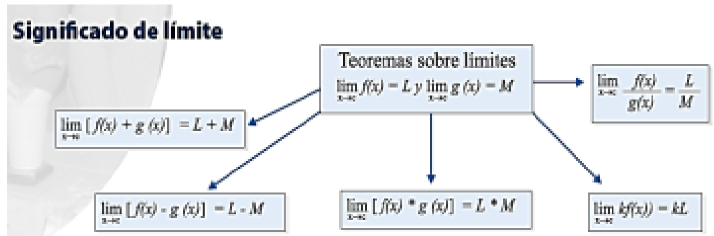
Significado intuitivo de límite

Decir que el $\lim_{x \to c} f(x) = 1$ significa que cuando x esta cerca de c pero diferente, $f(x)$ esta cerca de él.

Limites unilaterales

Los límites unilaterales se utilizan para aquellas funciones que presentan saltos, como la función parte entera, donde el límite no existe en los puntos donde salta.

El símbolo $x \to c^+$significa que x se aproxima a c por la derecha y $x \to c^-$significa que x se aproxima a c por la izquierda.



Decir que el $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$ dada (sin importar que sea tan pequeña), existe una correspondiente $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$ es decir:

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema sobre limites:

Teorema de límite 1:

Sea n un entero positivo, k una constante, y f y g funciones con limites en c. Entonces,

$$\lim_{x \to c} k = k$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} 6 = 6$$

Teorema de límite 2:

Para cualquier número dado a,

$$\lim_{x\to c} x = c$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3} x = 3$$

Teorema 3:

Sea k una constante y f(x) una función dada. Entonces:

$$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 = 2\lim_{x\to 3} x^4 = 2(3^4) = 2*81 = 162$$

Teorema 4:

Límite de una suma, diferencia, producto y cociente de funciones

Supóngase que Entonces:

1. $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4} 3x^2 + 2x = \lim_{x\to 4} 3x^2 + \lim_{x\to 4} 2x = 48 + 8 = 56$$

2. $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 1} 2x^3 - 5x = \lim_{x\to 1} 2x^3 - \lim_{x\to 1} 5x = 2 - 5 = -3$$

3. $\lim_{x\to c}[f(x)*g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) * \lim_{x\to c} g(x)$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}[(x^2+1)(3x-1)] = \lim_{x\to 2} x^2+1 * \lim_{x\to 2} 3x-1 = 5*5 = 25$$

4. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ***donde*** $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x}{3x^3-16} = \frac{\lim_{x\to 4} 2x}{\lim_{x\to 4} 3x^3 - 16} = \frac{8}{176} = \frac{1}{22}$$

Teorema 5: Límite de una potencia.

Sea n un entero positivo, entonces:

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c}[f(x)]\right]^n$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}[(x^2+3)]^4 = \left[\lim_{x\to 2}[x^2+3]\right]^4 = [7]^4 = 2401$$

Teorema 6: Límite de una función que contiene un radical.

Si $a > 0$ y n es cualquier entero positivo, o si $a < 0$ y n es un entero positivo impar, entonces:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

dado que $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ *cuando n es par.*

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} 8} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Resuelvo los ejercicios de usando los teoremas de limites:

1. $\lim_{x\to 3} 84 =$
2. $\lim_{x\to 4} 3x + 6 =$
3. $\lim_{x\to 3} 5x^2 - 2x =$
4. $\lim_{x\to 2}[(4x^2+9)(2x-3)] =$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{4x}{x^3-9} =$
6. $\lim_{x\to 3}[(3x^2+5)]^4 =$
7. $\lim_{x\to 5} \sqrt[5]{3125} =$

DEFINICIÓN DE DERIVADA

La derivada de la función $f(x)$ se define mediante el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Momento de Aplicación

2. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\tan(\pi x)}{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (1-x)^{\frac{2}{x}}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-3)^{20}(2x+1)^{30}}{(2x^2+7)^{25}}$

f) $\lim\limits_{x \to 90^\circ} \dfrac{\sin(2x)}{2x}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos(x)}{3x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - x + \sin(x)}{x + \cos(x)}$

i) $\lim\limits_{x \to -8^+} \dfrac{2x}{x+8}$

j) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(3y)}{4y}$

k) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos(\theta)}{\sin(2\theta)}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\sin(8x)}$

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

n) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(3y)\cot(5y)}{y\cos(4y)}$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\cos(x)}{\sin^2(3x)}$

p) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin\left(\dfrac{x}{2} + \sin(x)\right)$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{\sin(x)}$

r) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\tan(\pi x)}{x+2}$

s) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x^2}$

t) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

u) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$

3. Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición de derivada. Establezca los dominios de la función y de su derivada.

a) $f(t) = 5t - t^2$

b) $f(t) = 1 - 2t$

c) $h(x) = \quad 9 - x$

d) $f(x) = x^2 - 1$

e) $g(x) = x^3$

f) $f(x) = x^2 - 2x^3$

Construcción de Compromiso

1) Determine el número decimal correspondiente a cada porcentaje:
   a) 20 % b) 75% c) 140% d) 2% e) 6,2% f) 3 %
2) Exprese cada porcentaje en forma de fracción irreductible:
   a) 35 % b) 40 % c) 140 % d) 2% e) 6,2% f) 135 %
3) Determine el porcentaje que corresponde cada número decimal
   a) 0,67 b) 0,138 c) 1,59 d) 0,07 e) 2,325
4) Calcule: a) el 30% de 90 b) el 45% de 60 c) el 130% de 75 d) el 150% de 4600 e) el 3% de 14,7

Docente: Luis Lozada Ruiz
Cel: 3166831476
Email: luislozadaruiz2004@hotmail.com

Referencias Bibliográficas

Ministerio de Educación Nacional (2002). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá.

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MÁTEMÁTICAS
https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2009).
MEN, Decreto 1290. Derechos Básicos de Aprendizaje V2.
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/siemprediae/93226

Matemáticas para pensar 11, Editorial norma (2015)
Avanza matemática 11, Editorial norma (2015)

www.colombiaaprende.edu.co

RUBRICA DE AUTOEVALUACIÓN
Junto con tu acudiente diligencia tu autoevaluación colocando una X donde consideren que fue su desempeño

ASPECTO	Bajo	Básico	Alto	Superior
Autonomía en el trabajo				
Habito de estudio				
Orden				
Asesoría y comunicación				
Tiempo de entrega				