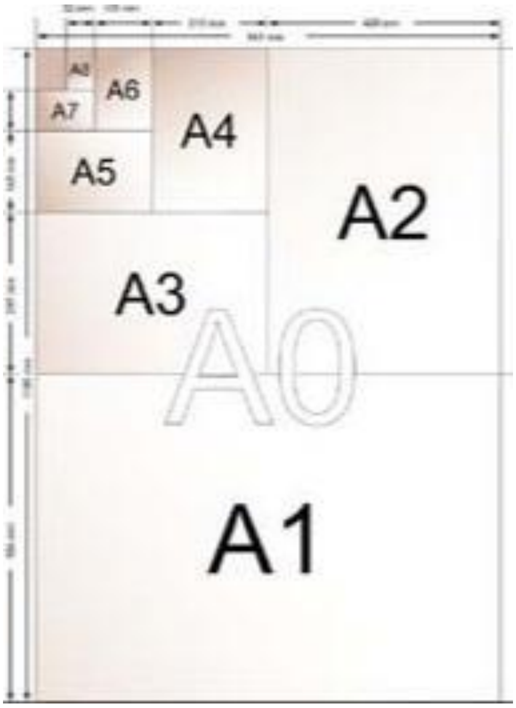
Matemáticas: Números Reales

Taller de Refuerzo

Este taller esta sugerido para los estudiantes que están reprobando la asignatura de matemáticas en el primer periodo (resultados que los estudiantes ya conocen porque se les dieron a conocer durante la clase) debe leerse con atención para poder tener herramientas conceptuales que le permitan resolver los ejercicios propuestos, la fecha de entrega es el ***27 de marzo del 2020,*** a través de fotografías las cuales enviaran al correo luislozadaruiz2004@hotmail.com para su revisión, la nota obtenida se promediara con las notas procedimentales que se tienen en la planilla.

Introducción



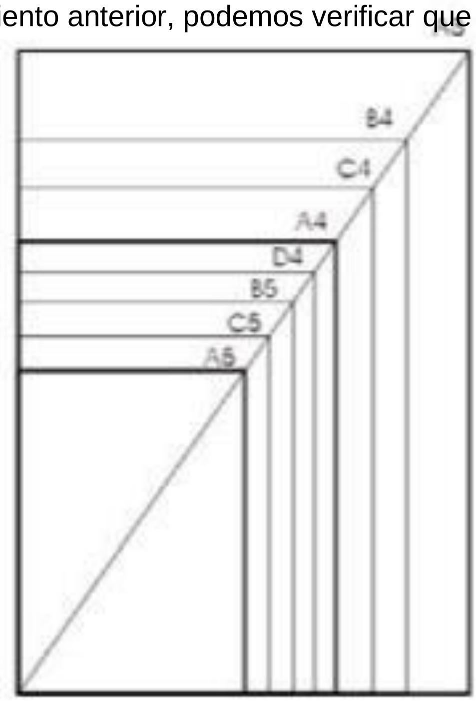
Los formatos de hojas DIN.

Existe un sistema internacionalmente aceptado de tamaños de hojas de papel rectangulares, llamados A0, A1, A2, A3, A4, etc. En la figura siguiente se muestra un diagrama con todos los tamaños juntos.

a) ¿Cómo se determinaron estos tamaños de hojas?

La hoja A1 se obtiene cortando por la mitad la hoja A0, en el sentido del ancho; l ahoja A2 se obtiene cortando por la mitad la hoja A1, en el sentido del ancho, y así sucesivamente, tal como se muestra en la secuencia siguiente:

b) ¿Qué propiedades tienen las hojas obtenidas?
Si realizamos el procedimiento anterior, podemos verificar que las hojas obtenidas, se pueden agrupar así:



En la tabla siguiente, registramos las dimensiones de las hojas A4, A5, A6, etc.

Hoja	Ancho (en cm.)	Largo (en cm.)	$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}}$
A4	21	29,7	1,414
A5	14,85	21	1,414
A6	10,5	14,85	1,414
A7	7,425	10,5	1,414
A8	5,25	7,425	1,414
A9	3,7125	5,25	1,414

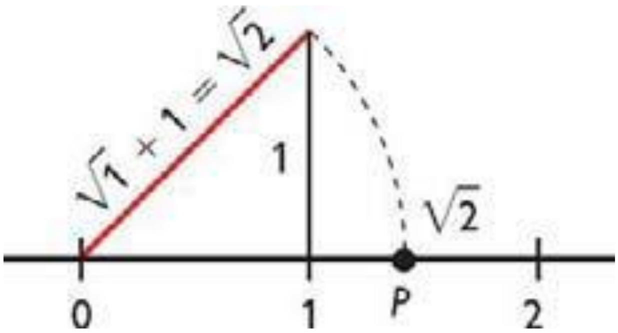
Las hojas A4 son las más utilizadas. En la indicación del paquete de la resma, se indica que la hoja A4 tiene las dimensiones de 29,7 cm por 21 cm.

De manera que se puede observar que el ancho y largo de todas las hojas, verifican la relación

$$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}} = \sqrt{2}$$

Ahora bien, ¿cómo podemos representar $\sqrt{2}$ en la recta numérica?

Utilizando la relación pitagórica entre los lados de un triángulo rectángulo, dibujamos uno cuyos catetos midan a 1 y obtenemos que la hipotenusa mide exactamente $\sqrt{2}$, como muestra la figura siguiente:



En la situación inicial planteada, se han operado con todo tipo de números. Números naturales, decimales, expresiones fraccionarias y hasta números irracionales.

Repasemos bien el conjunto total de números y su ubicación en el es-quema total, para identificar y reconocer cuando aparecen en distintos problemas.

Recomendamos analizar las cuestiones planteadas durante la lectura y consultar al docente en caso de duda.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números naturales

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacío se los denomina números naturales. Designamos con la letra IN al conjunto de dichos números.

$$IN = \{1,2,3,4,5...\}$$

LA DIFERENCIA ENTRE DOS NÚMEROS NATURALES ¿ES SIEM-PRE UN NÚMERO NATURAL?

Números enteros

El conjunto de los números enteros es la unión de los conjuntos de números naturales, el cero y los naturales negativos.

Simbólicamente: $\boxed{Z = N \cup \{0\} \cup N^{-}}$

¿Cuántos números enteros existen entre -3 y 7? ¿Cuántos números enteros existen entre dos ente-ros dados?

Un número racional se puede expresar como fracción $\frac{n}{m}$ *, donde n y m son números enteros y m ≠ 0*

Escribir un número racional entre 3/2 y 3/7 .

¿Cuántos números racionales hay entre estos dos números?

DESAFIO *La siguiente secuencia algebraica muestra que todos los números reales son cero. ¿Dónde está el error?*

$$\begin{array}{c}
\textit{Si } a \in R \\
a = a \\
a^2 = a^2 \\
a_2 - a_2 = a_2 - a_2 \\
(a - a)(a + a) = a(a - a) \\
a + a = a \\
a = a - a \\
a = 0
\end{array}$$

Todo número racional puede expresarse como número decimal exacto o periódico.

Los números que no se pueden expresar como fracción son números irracionales.

Ejemplos de números reales

Ejemplo 1

0,1234567891011...

La parte decimal de este número irracional es la sucesión de los números naturales.

Ejemplo 2

p ≅ 3,141592654

El símbolo ≅ indica que se esto representa una aproximación del número irracional π*. Notemos que también existen otras aproximaciones para este número; por ejemplo:* 3,14 *;* 3,141 *;* 3,14159 *;* 3,1416 *; ... etc.*

El número aparece al calcular la longitud de una circunferencia y el área de un círculo. Se sugiere ver video http://www.rtve.es/aventura/universo-matematico/webcap2/actividades_parte_2.html

Ejemplo 3

e ≅ 2,71

Representa una aproximación del número irracional e*. Al efectuar cálculos en los que intervienen los números irracionales, tomamos una cantidad finita (entre* 3 *y* 5*) de cifras decimales. Por lo tanto, podemos considerar* e ≅ 2,718 *o bien* e ≅ 2,71828*. El número e se presenta en procesos de crecimiento de una población animal o vegetal, y en problemas de desintegración radiactiva. Seguramente habrás visto en el tendido de cables eléctricos que los cables entre un poste y otro determinan una curva en cuya ecuación también está presente el número* e.

Ejemplo 4

Otro número irracional muy famoso, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$*, llamado el número de oro, se obtiene si realizas, por ejemplo, el cociente entre las longitudes del lado menor y el lado mayor de las hojas tamaño A4 que comúnmente se utilizan en fotocopiadora, o realizando el mismo cálculo con los lados de una tarjeta de crédito.*

La unión del conjunto de números racionales con los números irracionales forma el conjunto de números reales.

Ahora que tenemos un criterio común para ordenar y ubicar números en una estructura formal y una simbología universal para comprender cualquier material bibliográfico que puedas consultar como referencia, podemos revisar ciertas operaciones entre números *como la división y su algoritmo, que servirá de herramienta para luego resolver ciertas situaciones problemáticas.*

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN	$a,b \in Z,\ a \neq 0\ \exists q,r$ únicos, tales que $b = a.q + r$ $0 \leq r < \lvert a \rvert$

En lenguaje coloquial la simbología expresada en el algoritmo de la división, sería:

"Dados dos números enteros a *y* b, *a distinto de cero, existen dos números únicos* q *y* r *tales que verifica* b = a.q + r, *tal que* r *sea mayor que cero y menor que el módulo de* a.*"*

Simbólicamente

$$\begin{array}{l|l} b & a \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Para resolver algunos de los problemas iniciales, son útiles los conceptos de Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo entre dos números.

Recordemos que:

Máximo Común Divisor	*Si se descomponen dos números enteros positivos en sus factores primos, el máximo común divisor es el producto de los factores primos comunes con el menor exponente.*
Mínimo Común Múltiplo	*Si se descomponen dos números enteros positivos en sus factores primos, el mínimo común múltiplo es el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente*

Síntesis de conjuntos numéricos

NUMEROS NATURALES (IN)
0
} NUMEROS NATURALES (IN^O)

NUMEROS NATURALES (IN^O)
NUMEROS NATURALES NEGATIVOS
} NUMEROS ENTEROS (Z)

NUMEROS ENTEROS (Z)
NUMEROS FRACCIONARIOS
} (Q) NUMEROS RACIONALES

(Q) NUMEROS RACIONALES
(II) NUMEROS IRRACIONALES
} NUMEROS REALES ($\mathfrak{R}$)

Propiedades de la potenciación

1) En el producto de potencias de igual base los exponentes se suman:

$a^n . a^m = a^{n+m}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^5=-\frac{32}{243}$$

2) En el cociente de potencias de igual base los exponentes se restan:

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2:\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}=-\frac{3}{2}$$

3) En la potencia de potencia los exponentes se multiplican:

$(a^n)^m = a^{n.m}$

$$\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$$

4) *Potencia de exponente uno: Todo número (o letra) de exponente uno, es el mismo número (o letra).*

$b^1 = b$ $\qquad$ $2^1=2$

5) *Potencia de exponente cero: Todo número (o letra) de exponente cero, da por resultado 1.*

$b^0 = 1$ $\qquad$ $2^0 = 1$

Cuidado: si la base es 0 *no está definido:* 0^0

6) La potencia distribuye al producto y al cociente:

$$\left(\frac{1}{5}.\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{225}$$

$$\left(\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{25}.\frac{9}{4}=\frac{9}{100}$$

7) Cuadrado de la suma de dos números

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Ejemplo: $\left(x+2y^2\right)^2=x^2+4xy^2+4y^4$

8) *La potencia no es conmutativa:* $2^3 \neq 3^2$

9) *La potencia no es asociativa:* $(4^2)^3 \neq 4(2^3)$

10) *La potenciación no es distributiva con respecto a la adición ni a la sustracción*

$(4+2)^2 \neq 4^2+2^2$ *pues* 36 *es distinto que* 20

Radicación

Decimos que: $\sqrt[3]{729000} = 90$ *pues* $90^3 = 729000$

$\sqrt[3]{512000} = 80$ *pues* $80^3 = 512000$

Pero no podemos encontrar solución a $\sqrt{-10000}$ *ya que no conocemos números que elevados al cuadrado den resultado negativo.*

$$\sqrt[n]{a} = p$$

Simbología

n: índice, es un número natural mayor o igual que dos.
a*: radicando, es un número racional mayor o igual que cero.*

$\sqrt{\ }$ *radical*
p: valor raíz o resultado

La raíz enésima de un número racional a *(no negativo) es un número racional* b*, lo que es equivalente* a *decir que* a *es la potencia enésima de* b*.*

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Raíz enésima par y a ≥≥0

Ejemplo: Calcular $\sqrt{169}$

Solución: El radical $\sqrt{169}$ *representa un único número real no negativo, el número 13, que corresponde a un único punto de la recta numérica. Pero.....*

¡Cuidado!!: Para resolver, por ejemplo la ecuación $x^2 = 169$ *procedemos así:*

$\sqrt{x^2} = \sqrt{169}$ *, aplicando raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación, por propiedad de módulo.*

$|x| = \sqrt{x^2}$ *, entonces,* $|x| = 13$

Pero, hay dos valores de "x" cuyo módulo es 13*:* $|13| = 13$ *y* $|-13| = 13$

Debemos tener presente que la ecuación $x = 169$ *tiene dos soluciones:*

$x_1 = -13$ *y* $x_2 = 13$*, mientras que el radical* $\sqrt{169}$ *representa un único número real como vimos.*

Propiedades de la radicación

Ejemplo 1: *Raíz de raíz (raíces sucesivas): es otra raíz cuyo índice es el producto de los índices dados.*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$$ *Ejemplo:* $$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\times 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Ejemplo 2: *La radicación es distributiva respecto de la multiplicación y división:*

$$\sqrt{\frac{64}{4}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}}$$
$$\sqrt{16} = \frac{8}{2}$$
$$4 = 4$$

$$\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{2.8} = \sqrt{16} = 4$$

Ejemplo 3: *La radicación no es distributiva respecto de la adición y sustracción*

$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$
$$\sqrt{25} \neq 3 + 4$$
$$5 \neq 7$$

Ejemplo 4: *La radicación no es conmutativa* $\sqrt[3]{8} \neq \sqrt[8]{3}$

Un error común que se comete

$$-2^2 \neq (-2)^2$$

Observa que en el primer miembro de la desigualdad, la potencia no incluye al signo “-“, mientras que en el segundo miembro sí.

.

ACTIVIDAD

1) Completar la tabla con $\in$, $\notin$ según corresponda.

Número \ Conjunto	Naturales	Enteros	Racional	Irracionales	Reales
7					
$\sqrt{10}$					
-2,08					
1,121221221					
$\sqrt{25}$					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{7}{6}$					

2) Aplicando propiedades calcula: $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^{4n+1}(\sqrt{8}-\sqrt{2})^{1-2n}$

3) a) Escribir un número racional mayor que 1 y menor que $\sqrt{2}$

b) Escribir un número irracional mayor que 2 y menor que 2,1.

4) Expresar la medida exacta, en centímetros, del perímetro de un cuadrado si el lado mide $\sqrt{2}$

5) Expresar la medida exacta, en metros, de la superficie de un terreno triangular cuyos catetos miden $\sqrt{2}$ metros.

6) Calcular la medida de la diagonal de un terreno rectangular cuyos lados miden 10 metros y 12 metros. Expresar el resultado aproximado con dos decimales.

7) Calcular el área de un círculo de 100 cm. de radio y expresar el resultado aproximado con 3 decimales.

8) Resolver y verificar el resultado con la calculadora.

a) $$\frac{\frac{7}{10}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{7}{4}}{2-\frac{1}{4}}=$$

b) $$\frac{2-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}}+\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=$$

Números irracionales

Alguno de los problemas anteriores, requerían una respuesta en forma exacta y otros aproximada.

Evidentemente, habrá problemas donde convenga diferenciar entre algún tipo de respuesta, exacta o aproximada.

La simbología utilizada para representar los números irracionales, por ejemplo $\sqrt{2}$ *, es justamente para identificar un número que tiene infinitas cifras decimales no periódicas y por lo tanto, como sabemos, la precisión depende de la cantidad de cifras que use como resultado de algún problema. Es decir;*

$\sqrt{2}$ → *Valor exacto*

1,41 → Valor aproximado en dos decimales

Continuando con la revisión de las propiedades de los números y sus operaciones, te pro-pongo el siguiente:

DESAFIO *Sigue la secuencia siguiente y DESCUBRE EL ERROR:*

$$16-36=25-45$$
$$16-36+\left(\frac{9}{2}\right)^2=25-45+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$
$$4^2-2.4.\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2.5.\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$
$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$
$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$
$$4=5$$

Potencia de exponente racional

Extendemos la idea de potencia, de modo que los números racionales no enteros puedan funcionar como exponentes. Veremos que estas potencias guardan una estrecha relación con las raíces.

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{n/m} \longrightarrow \sqrt[2]{3^5}=3^{5/2}$$

EJEMPLO
Observa el siguiente ejemplo donde se expresa de distintas maneras, una operación, aplicando propiedades y exponente racional:

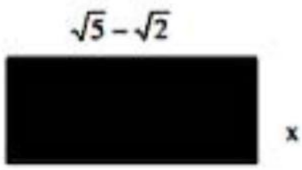
$$\left(2^{-\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}\right)^2=\left(2^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{10}}\right)^2=\left(2^{-\frac{3}{20}}\right)^2=\left(2^{-\frac{3}{20}\cdot 2}\right)=\left(2^{-\frac{6}{20}}\right)=\left(2^{-\frac{3}{10}}\right)=\sqrt[10]{2^{-3}}=\sqrt[10]{\frac{1}{8}}$$

ACTIVIDAD: NÚMEROS IRRACIONALES

1) Simplifica, utilizando la posibilidad de expresar la radicación como potencia fraccionaria.

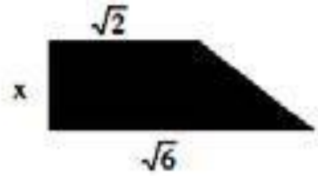
a) $\dfrac{\sqrt{14}.\sqrt[3]{49}}{\sqrt[4]{28}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{12}.\sqrt{32}}{\sqrt[3]{16}.\sqrt[5]{6}}$

2) Las siguientes figuras tienen área igual a 1. Calcular los lados desconocidos. Expresar todos los resultados sin radicales en el denominador.

a) 

b) 

altura del triángulo: $\sqrt{7}$

c) 

3) Expresar en forma de radicales las siguientes expresiones:

a) $4^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{-\frac{3}{5}}$ c) $\left[\dfrac{1}{16}\right]^{\frac{1}{4}}$ d) $0,4^{-\frac{1}{3}}$

4) Para cada una de las siguientes expresiones, obtener una equivalente con denominador racional:

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

5) Simplificar todo lo posible la expresión. Luego, calcular su valor para x = 0,0001.

$$x^{-\frac{2}{3}\,^{\frac{3}{5}\,^{\frac{5}{4}}}}$$

6) Los siguientes cálculos están mal realizados. Corrígelos:

a) $\sqrt{100+25}=\sqrt{100}+\sqrt{25}$

b) $\sqrt[6]{(-2)^6}=-2$

c) $\sqrt{(-9)(-4)}=\sqrt{-9}.\sqrt{-4}$

7) Expresar el radicando como producto, para extraer todos los factores posibles de las raíces:

a) $\sqrt{75}$ b) $\sqrt{200}$ c) $\sqrt[5]{96}$

8) Simplificar las siguientes operaciones entre números irracionales:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

c) $\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{80} - \sqrt{125}$

e) $\sqrt{\frac{49}{5}} - \sqrt{\frac{1}{125}}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{18}$

d) $-\sqrt{6} + \sqrt{150} + \sqrt{98} - \sqrt{288}$

9) Resolver usando las propiedades y simplificar las expresiones:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

d) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

e) $3\sqrt{\frac{2}{9}} - 5\sqrt{\frac{2}{9}} - 5\sqrt{50} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{25}}$

10) Simplificar las expresiones:

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

b) $5 . \sqrt[3]{5} : \sqrt{\left(\frac{1}{5} . \sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}}$

11) Racionalizar y simplificar las expresiones:

a) $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$