	COLEGIO METROPOLITANO DEL SUR Resolución No. 0427 del 11 de Mayo de 2010 GUIA 06	

1. IDENTIFICACIÓN

Área: Matemáticas	**Asignatura:** Calculo	**Fecha:** Agosto 10 de 2015	**Grado:** Undécimo
Nombre del Estudiante:			**Tema:** Limites de Funciones
Nombre del Docente: Luis Lozada Ruiz			**Tiempo Posible:** 2 Semanas

RECURSOS (RESOURCES): Cuaderno, calculadora, Libro Matemáticas SE, Internet.

APRENDIZAJES ESPERADOS (TARGET LEARNING):

- Efectúa búsqueda de información de acuerdo con sus necesidades de aprendizaje.
- Utiliza la información encontrada para aplicarla en diferentes situaciones problémicas.
- Determina los términos de una sucesión.
- Calcula el límite de una sucesión.
- Determina las cotas de una sucesión.

INDICADOR DE AUTONOMÍA (AUTONOMY INDICATOR): Extrae y organiza la información necesaria de fuentes apropiadas que le permita proponer soluciones a diferentes tipos de problemas.

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE (LEARNING STRATEGIES): Lectura autorregulada en matemáticas.

1. INDUCCIÓN (INDUCTION) 20 MINUTOS

1.1. AMBIENTACIÓN (WARMING UP)

La sucesion de Fibonacci
María Isabel Viggiani Rocha[1]

Sea la sucesión { an } definida por: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. si n>3 y $a_1 = a_2 = 1$. Esta sucesión es conocida como la sucesión de Fibonacci y la aparición de la misma brota por doquier. Es decir, está en infinidad de ejemplos: tanto en las plantas, como en los animales, en la Física, en la Matemática, etc. El nombre de esta sucesión se debe al más destacado matemático de la Edad Media: Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci (filius Bonacci = hijo de Bonacci), quien nació en 1.179 y murió en la primera mitad del siglo XIII.

El mismo, relata que su padre ocupaba un cargo consular en Argelia y que lo llevó para iniciarlo en los cálculos aritméticos de los árabes pues Leonardo se había educado con la numeración alfabética de los griegos y de los latinos, y con el uso del ábaco. Con los nuevos conocimientos se entusiasmó y viajó a diversos países árabes, recibiendo ahí lecciones de sabios musulmanes. De vuelta a Pisa, compuso 5 obras: la primera de ellas en 1.202, revisada y aumentada en 1.228 es Liber Abaci (Libre del Abaco). Con ella introduce el uso del cero en Occidente y presenta al mundo la famosa sucesión mediante un problema referido a los conejos:

"Alguien puso en un corral una pareja de conejos recién nacidos con el propósito de averiguar cuántas parejas habrá al cabo de un año. La prolífica naturaleza de estos animalitos indica que cada pareja recién nacida requiere un mes de maduración, durante el cual no se reproduce, pero al finalizar el segundo mes da a luz una nueva pareja, y luego sigue pariendo cada mes otra pareja. ¿Cuántas parejas habrá al término de un año, suponiendo que ningún conejo muere en esta feliz experiencia?"
La solución es simple. Al empezar tenemos una pareja. Al finalizar el primer mes seguimos con una sola pareja. Al término del segundo mes, el corral ya cuenta con 2 parejas. Al cabo del tercer mes la pareja inicial da a luz otra pareja: ya hay 3 parejas una nueva. Al final del cuarto mes, procrea la pareja inicial y la primogénita: tenemos 5 parejas. Al final del quinto mes: 8 parejas y así sucesivamente. Al culminar el año el corral tendrá 233 parejas de conejos.

Ver la grafica de esta situación dada por el docente en el tablero.

1.2. ACTIVACIÓN DE CONOCIMENTOS PREVIOS (PRIOR KNOWLEDGE) 30 MINUTOS

En el cálculo de límites de funciones vas a necesitar aplicar tus conocimientos de algebra en la realización de operaciones, racionalización y simplificación de variadas expresiones.
Simplifica las siguientes expresiones:

[1] Tomado de http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/FibonacciFinal2.pdf

1. $\dfrac{x^3-1}{x-1} = =$

2. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x+1} =$

3. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} =$

4. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x-1} =$

5. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} =$

6. $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+2x-3} =$

7. $\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4} =$

8. $\dfrac{x-4}{x^2-x-12} =$

9. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} =$

10. $\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} =$

1.3. INFORMACION (INFOMATION)

Realiza una lectura cuidadosa del texto[i] y retroalimentemos la explicación que realiza el docente.

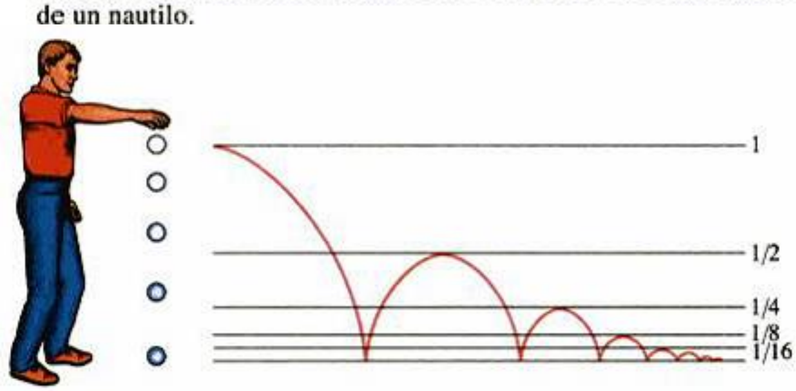
- Lectura de título y los recuadros de cada lección.
- Hacer un listado y consultar el significado de las palabras desconocidas.
- Formulación de Preguntas para cada título y recuadro.
- Leer con el propósito de responder las preguntas anteriores.
- Leer las definiciones dadas en forma verbal o simbólica y expresarlas por escrito como las esté entendiendo.
- Realiza un escrito en tu cuaderno que corresponda a cada paso de la lectura autorregulada en matemáticas.

Esquema del capítulo

En este capítulo estudiamos las sucesiones y series de números. En pocas palabras, una sucesión es una lista de números escritos en un orden específico. Los números de la sucesión se escriben con frecuencia como $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Los puntos significan que la lista continúa por siempre. Un ejemplo sencillo es la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

Las sucesiones se presentan en muchas situaciones del mundo cotidiano. Por ejemplo, si usted deposita una cantidad de dinero en una cuenta que genera intereses, el interés ganado cada mes genera una sucesión. Si usted lanza una pelota y la deja rebotar, la altura que alcanza la pelota en cada rebote sucesivo es una sucesión. Una sucesión interesante está oculta en la estructura interna de la concha de un nautilo.



Podemos describir el patrón de la sucesión mostrada mediante la *fórmula*:

$$a_n = 5n$$

Usted podría haber pensado una manera distinta de describir el patrón, como, "pasa de un número al otro sumando 5". Esta manera natural de describir la sucesión se expresa mediante la *fórmula recursiva*:

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

empezando con $a_1 = 5$. Trate de sustituir $n = 1, 2, 3, \ldots$ en cada una de estas fórmulas para poder observar la manera en que se generan los números en la sucesión.

Muchos procesos del mundo cotidiano generan listas de números. Por ejemplo, el balance en una cuenta bancaria al final de cada mes forma una lista de números cuando se rastrea en el tiempo. Los matemáticos llaman a estas listas *sucesiones*. En esta sección estudiamos las sucesiones y sus aplicaciones.

Sucesiones

Una *sucesión* es un conjunto de números escritos en un orden específico:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 se llama *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Puesto que para cada número natural n hay un número correspondiente a_n, podemos definir a una sucesión como una función.

Definición de una sucesión

Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ son los **términos** de la sucesión.

Por lo regular se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

He aquí un ejemplo sencillo de una sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Los puntos indican que la sucesión continúa indefinidamente. Se puede escribir una sucesión en esta manera cuando es evidente cuáles son los términos siguientes. Esta sucesión está formada por números pares. Para ser más exactos, es necesario especificar un procedimiento para hallar *todos* los términos de la sucesión. Esto se puede efectuar dando una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión. En este caso,

$$a_n = 2n$$

y la sucesión se puede expresar como

$$\underset{\substack{\text{1er.}\\ \text{término}}}{2}, \quad \underset{\substack{\text{2o.}\\ \text{término}}}{4}, \quad \underset{\substack{\text{3er.}\\ \text{término}}}{6}, \quad \underset{\substack{\text{4o.}\\ \text{término}}}{8}, \quad \ldots, \quad \underset{\substack{n\text{-ésimo}\\ \text{término}}}{2n}, \quad \ldots$$

Observe cómo la fórmula $a_n = 2n$ da todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, al sustituir 1, 2, 3 y 4 en n tenemos los primeros cuatro términos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Para encontrar el 103o. término de esta sucesión, usamos $n = 103$ para obtener

$$a_{103} = 2 \cdot 103 = 206$$

Ejemplo 1 Cálculo de los términos de una sucesión

Calcular los primeros cinco términos y el centésimo término de la sucesión definida por cada fórmula.

a) $a_n = 2n - 1$

b) $c_n = n^2 - 1$

c) $t_n = \dfrac{n}{n+1}$

d) $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

Solución Para determinar los primeros cinco términos se sustituye $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 en la fórmula en el lugar del n-ésimo término. Para determinar el centésimo término, se sustituye $n = 100$. Así se obtiene lo siguiente:

n-ésimo término	Primeros cinco términos	Centésimo término
a) $2n - 1$	$1, 3, 5, 7, 9$	199
b) $n^2 - 1$	$0, 3, 8, 15, 24$	9999
c) $\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$	$\dfrac{100}{101}$
d) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{1}{2^{100}}$

■

En el ejemplo 1d) la presencia de $(-1)^n$ en la sucesión tiene el efecto de hacer que los términos sucesivos sean alternadamente negativos y positivos.

Con frecuencia es útil esbozar una sucesión dibujando una gráfica. Puesto que una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales, podemos dibujar la gráfica en el plano cartesiano. Por ejemplo, la gráfica de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

se muestra en la figura 1. Compárela con la gráfica de

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

mostrada en la figura 2. La gráfica de cada una de las sucesiones consiste en puntos aislados que *no* están unidos.

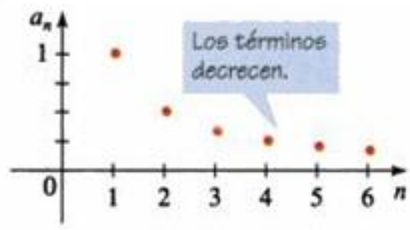


Figura 1

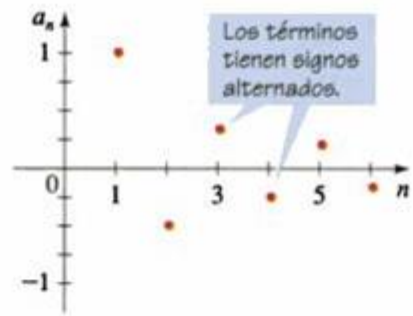


Figura 2

Ejemplo 2 Determinación del n-ésimo término de una sucesión

Determine el n-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ b) $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

Solución

a) Se puede observar que los numeradores de estas fracciones son los números impares y los denominadores son los números pares. Los números pares son de la forma $2n$, y los números impares son de la forma $2n - 1$ (un número impar difiere de un número par en 1). Entonces, la sucesión que tienen estos números en sus primeros cuatro términos está representada por

$$a_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

b) Estos números son potencias de 2 y se alternan de signo, por lo que una sucesión que concuerda con estos términos es

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

Debe comprobar que estas fórmulas generan en verdad los términos dados. ■

Sucesiones definidas recursivamente

Algunas sucesiones carecen de fórmulas que se definen tan fácilmente como las del ejemplo anterior. El n-ésimo término de una sucesión podría depender de algunos o de todos los términos que lo preceden. Una sucesión definida de esta manera se llama **recursiva**. He aquí dos ejemplos.

Ejemplo 3 **Determinación de los términos de una sucesión definida recursivamente**

Determine los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

Solución La fórmula que define esta sucesión es recursiva. Permite encontrar el n-ésimo término a_n si se conoce el término precedente a_{n-1}. Por lo tanto, se puede calcular el segundo término a partir del primero, el tercero a partir del segundo, el cuarto término a partir del tercero y así sucesivamente. Puesto que ya tenemos el primer término $a_1 = 1$, se puede continuar como sigue

$$a_2 = 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9$$

$$a_3 = 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33$$

$$a_4 = 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105$$

$$a_5 = 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321$$

Por lo tanto, los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$1, 9, 33, 105, 321, \ldots$$

■

1.4. META DE APRENDIZAJE (LEARNING GOAL)

A partir de lo trabajado en y los aprendizajes esperados plantea tu meta de aprendizaje:

____
____
____

2. APRENDIZAJE INDIVIDUAL (INDIVIDUAL LEARNING)

Realiza las actividades propuestas por el docente en el tablero.

3. APRENDIZAJE DE GRUPO (GROUP LEARNING)

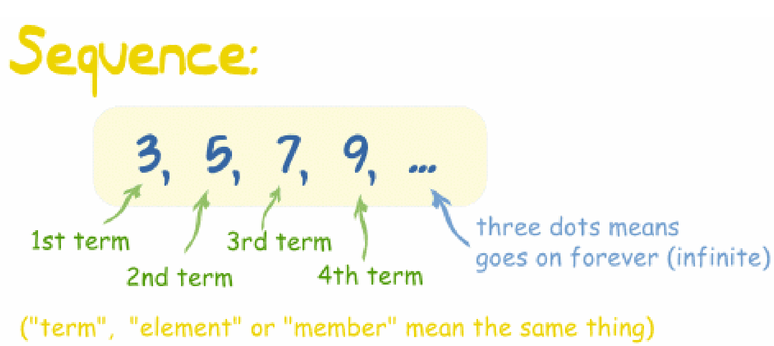
2.1. SAY IT IN ENGLISH

2.1.1. Pre reading: Read the introduction about **sequences**. Underline unfamiliar words; then, list them in your notebook and look them up in the dictionary if necessary.

2.1.2. Reading: Talking about sequences. While reading the text, check the examples given. Pay close attention to the rules used to solve the exercises.

A Sequence is a set of things (usually numbers) that are in order.

Each number in the sequence is called a **term** (or sometimes "element" or "member"):



Finding Missing Numbers

To find a missing number, first find a **Rule** behind the Sequence.
Sometimes you can just look at the numbers and see a pattern:

Example: 1, 4, 9, 16, ?

Answer: they are Squares ($1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2 = 16$, ...)

Rule: $\mathbf{x_n = n^2}$

Sequence: 1, 4, 9, 16, **25, 36, 49, ...**

Did you see how we wrote that rule using "x" and "n" ?

$\mathbf{x_n}$ means "term number n", so term 3 would be written $\mathbf{x_3}$

And we also used "n" in the formula, so the formula for term 3 is $3^2 = 9$. This could be written

$$x_3 = 3^2 = 9$$

Once we have a Rule we can use it to find any term. For example, the 25th term can be found by "plugging in" **25** wherever **n** is.

$$x_{25} = 25^2 = 625$$

How about another example:

Example: 3, 5, 8, 13, 21, ?

After 3 and 5 all the rest are the sum of the two numbers before, that is 3 + 5 = 8, 5 + 8 = 13 and so on (it is actually **part of** the Fibonacci Sequence):

Rule: $\mathbf{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$

Sequence: 3, 5, 8, 13, 21, **34, 55, 89, ...**

Now what does $\mathbf{x_{n-1}}$ mean? It just means "the previous term" because the term number (**n**) is 1 less (**n-1**).

So, if **n** was **6**, then $\mathbf{x_n = x_6}$ (the 6th term) and $\mathbf{x_{n-1} = x_{6-1} = x_5}$ (the 5th term)

So, let's apply that Rule to the 6th term:

$$x_6 = x_{6-1} + x_{6-2}$$
$$x_6 = x_5 + x_4$$

We already know the 4th term is 13, and the 5th is 21, so the answer is:

$$x_6 = 21 + 13 = 34$$

Pretty simple ... just put numbers instead of "n

2.1.3 Post reading: Based on the reading, answer the following questions. Use your notebook

- What is the next number of the sequence 1, 3, 7,.... , given that the rule for the sequence is:
  $x_1 = 1$
  $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$, $n \geq 2$
- Use differences to find the rule for the sequence {1, 5, 14, 28, 47, ...}
- Find a rule for the sequence {1, 4, 10, 20, 35, 56, ...} using first, second and third differences

4. EVALUACIÓN (EVALUATION)

4.1. AUTOEVALUACIÓN (SELF-EVALUATION)(30 min)

Prepárate para la evaluación, para esto contesta sinceramente las siguientes preguntas:

DESEMPEÑO	SI	NO	¿POR QUÉ?	¿CÓMO MEJORAR?
• Determina el término general de una sucesión a partir de las regularidades existentes dentro de sus elementos.				

• Determino las cotas de una sucesión (si las tienes).				
• Calculo el limite de sucesiones.				

4.2. COEVALUACIÓN (CO EVALUATION) (2 min)

Evalúa el alcance de la estrategia de aprendizaje a diferencia como se trabajaba en años anteriores. Me sirvió para comprender en un:

Estrategia de aprendizaje										
	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%

5. APRENDIZAJE EN CASA (HOME LEARNIG) 20 MINUTOS

Complementa tus conocimientos, encuentra mas ejemplos y estudia como se obtiene el limite de algunas sucesiones en la pagina web http://www.e-sm.met/11mt14 y http://www.e-sm.met/11mt15

BIBLIOGRAFÍA (BIBLIOGRAPHY AND WEB REFERENCE)

- DAVID, B.S (2006). Espíral 11°. Bogota. Norma
- www.mathwarehouse.com
- www.ite.educaciones.es
- Alonso, Luz Estela. (2012). Matemáticas Sé. Editorial SM

- [i] STEWART, James. (Quinta Edicion). Precalculo. Cengage Learning.